Biometrieübung 2
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe

---

1. Kartenspiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man aus einem Kartenspiel mit 52 Karten eine Karte entnimmt, die ein As oder Karo ist?

2. Forststudent (männlich)

Ein Forststudent fordert von der Frau seiner Träume, daß sie grüne Augen hat, erstklassig Wildbret zubereiten kann und sich für die Jagd interessiert. Diese 3 Merkmale seien stochastisch unabhängig, die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten seien 0.01, 0.01 und 0.00001. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste, ihm zufällig begegnende Dame die gewünschten Eigenschaften aufweist?

3. Hirschjagd

Drei Jäger, die gewöhnlich eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0.6, 0.7 und 0.8 aufweisen, schießen gemeinsam auf einen Hirsch. Wie groß ist seine Überlebenswahrscheinlichkeit?

4. Weidmannsheil

Ein kurzsichtiger Jäger schießt in ein Sprung Rehwild, dessen Stücke er nur schemenhaft erkennt. Der Sprung bestehe aus 6 Kitzen. 4 weiblichen und 5 männlichen Stücken. Angenommen sein Schuß treffe eines der Stücke tödlich und die Auswahl desselben erfolge ob der Kurzsichtigkeit des Jägers zufällig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das erlegte Reh (a) ein Kitz, (b) weiblich, (c) männlich, (d) kein Kitz und (e) ein Kitz oder ein weibliches Stück ist?

5. Weidmannsheil II

Der Jäger aus Aufgabe 4 ist über seinen Treffer so beglückt, daß er sogleich zwei weitere Stücke des Sprungs erlegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß er beim ersten Schuß ein Kitz, beim zweiten Schuß ein weibliches und beim dritten Schuß ein männliches Stück erlegt.

6. Wetten

Die Wahrscheinlichkeit, die Wetten A, B und C zu gewinnen, seien unabhängig voneinander 0,4 , 0,6 und 0,8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit: (1) alle, (2) keine, (3) mindestens eine, (4) genau eine, (5) genau zwei Wetten zu gewinnen?

7. Kartenspiel II

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel mit 32 Karten ein As (A) zu ziehen unter der Voraussetzung, daß es sich um eine Herz-Karte (B) handelt?

Letzte Änderung: 12.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 2
Wahrscheinlichkeit

Lösung

---

1. Kartenspiel

Ass: $P(E_1) = 4/52$
Karo: $P(E_2) = 13/52$
Karo und Ass: $P(E_1 \cap E_2) = 1/52$
Karo oder Ass: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 0{,}308$

2. Forststudent (männlich)

P = 0,01 * 0,01 * 0,00001 = 0,000000001 (1:1 Milliarde)

3. Hirschjagd

Nichttrefferwahrscheinlichkeit Jäger 1: $P(J_1) = 0{,}4$
Nichttrefferwahrscheinlichkeit Jäger 2: $P(J_2) = 0{,}3$
Nichttrefferwahrscheinlichkeit Jäger 3: $P(J_3) = 0{,}2$

$P(J_1 \cap J_2 \cap J_3) = P(J_1) * P(J_2) * P(J_3) = 0{,}4 * 0{,}3 * 0{,}2 = 0.024$

4. Weidmannsheil

. P(Kitz) = Anzahl Kitze / Anzahl Rehe in Rudel = 6/15 = 2/5
b. P(weiblich) = Anzahl weibliche Stücke / Anzahl Rehe in Rudel = 4/15
c. P(männlich) = Anzahl männliche Stücke / Anzahl Rehe in Rudel = 5/15 = 1/3
d. P(kein Kitz) = l - P(Kitz) = 1 - 2/5 = 3/5 oder
P(kein Kitz) = (Anzahl weiblich + Anzahl männlich) / Anzahl Rehe in Rudel = P(weiblich) + P(männlich) = 4/15 + 1/3 = 9/15 = 3/5
e. P(Kitz oder weiblich) = (Anzahl Kitze + Anzahl weibliche Stücke) / Anzahl Rehe in Rudel = 10/15 = 2/3

5. Weidmannsheil II

P(Kitz-weiblich-männlich)
= P(Anzahl Kitze / Anzahl Rehe im Rudel) * P(Anzahl weibliche Stücke / (Anzahl der Rehe im Rudel - 1Kitz)) * P(Anzahl männliche Stücke / (Anzahl Rehe im Rudel - 1 Kitz - 1 weibliches Reh))

$$= \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{2730} = \frac{4}{91} = 0{,}044$$

6. Wetten

1. P("alle") = $P(A \cap B \cap C)$ = 0,4 * 0,6 * 0,8 = 0,192
2. P("keine") = $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ = 0,6 * 0,4 * 0,2 = 0,048
3. P("mindestens eine") = 1 - P("keine") = 1 – 0,048 = 0,952
4. P("genau eine") = $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
   = 0,4 * 0,4 * 0,2 + 0,6 * 0,6 * 0,2 + 0,6 * 0,4 * 0,8 = 0,296
5. P("genau zwei") = $P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C)$
   = 0,4 * 0,6 * 0,2 + 0,4 * 0,4 * 0,8 + 0,6 * 0,6 * 0,8 = 0,464

Kontrolle: 0,048 + (0,296 + 0,464 + 0,192) = 0,048 + 0,952 = 1

7. Kartenspiel II

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (die Wahrscheinlichkeit für Herz As)

$P(B) = \frac{1}{4}$ (die Wahrscheinlichkeit für eine Herz-Karte)

$$P(A \mid B) = \frac{1}{32} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Letzte Änderung: 05.07.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 2
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Formeln

Inhalt

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert mathematische Modelle für zufällige Erscheinungen der objektiven Realität.
Beim Wurf mit einem idealen Würfel ist das Erscheinen irgendeiner Zahl i (i = 1, 2,..., 6) ein zufälliges Ereignis, etwa mit A_i bezeichnet.
Zufälligen Ereignissen *A, B* (Ereignisfeld) werden Wahrscheinlichkeiten *P(A), P(B)* für ihr Eintreten zugeordnet.

Relationen zwischen zufälligen Ereignissen

- $A \subset B$ bedeutet: *A* zieht *B* nach sich, d.h., wenn das Ereignis *A* eintritt, so ist gleichzeitig auch das Ereignis *B* eingetreten.
  Beispiel: Ist *A* das Ereignis, die Zahl 1 zu werfen, d.h. *A* = {1}, und *B* das Ereignis für das Auftreten einer ungeraden Augenzahl, d.h. *B* = {1,3,5}, dann gilt $A \subset B$, denn *A* zieht *B* nach sich.
- Das Ereignis C = A $\cup$ B (lies: "C ist gleich A vereinigt mit B") heißt die (logische) Summe der Ereignisse A und B und tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A und B eintritt.
  Beispiel: Es gelte A = {2} und B = {1,3,5}. Das Ereignis C = A $\cup$ B tritt genau dann ein, wenn entweder 1 oder 2 oder 3 oder 5 geworfen wird, d.h. C = {1,2,3,5}.
- Das Ereignis C = A $\cap$ B (lies: "C ist gleich A geschnitten mit B") heißt das (logische) Produkt der Ereignisse A und B und tritt ein, wenn sowohl A als auch B eintritt.
  Beispiel: Mit A = {1} und B = {1,3,5} gilt C = {1}, C tritt also nur dann ein, wenn eine Eins geworfen wird.
- Ein Ereignis E heißt sicheres Ereignis (bezüglich eines festen Versuches), wenn es stets (d.h. bei jeder Wiederholung dieses Versuches) eintritt.
  Beispiel: E = {1,2,3,4,5,6} ist das sichere Ereignis bei einem Wurf mit einem idealen Würfel, da bei einem Wurf eine der sechs Augenzahlen bestimmt eintritt.

- Ein Ereignis $\emptyset$ heißt unmögliches Ereignis, wenn es niemals (d.h. bei keiner Wiederholung dieses Versuches) eintritt.
  Beispiel: Im Beispiel des idealen Würfels ist das etwa $\emptyset$ = {7} oder $\emptyset$ = {0}.
- $\overline{A}$ heißt das zu A komplementäre Ereignis und tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.
  Beispiel: Das komplementäre Ereignis zu A = {1} ist $\overline{A}$ = {2,3,4,5,6}.
  Es gilt stets $A \cup \overline{A} = E$ und $A \cap \overline{A} = \emptyset$. E und $\emptyset$ sind einander komplementär.
- A und B heißen unvereinbar oder disjunkt, wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist, d.h. $A \cap B = \emptyset$ gilt. Man sagt auch: A und B schließen sich gegenseitig aus.
  Beispiel: Setzt man A = {1} und B = {2,4,6}, so sind A und B unvereinbar, d.h. $A \cap B = \emptyset$.
- Alle zufälligen Ereignisse, die für ein bestimmtes Beispiel unter gleichbleibenden Bedingungen auftreten können, bilden das Ereignisfeld E.
  Ein Ereignis $A \in E$ heißt elementares Ereignis oder Elementarereignis, wenn es sich nicht weiter zerlegen läßt.
  Beispiel: Die Ereignisse $A_1,...,A_6$ sind die Elementarereignisse zu dem idealen Wurf gehörenden Ereignisfeld E.

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Ist unter n_1 Versuchen das Ereignis *A* gerade m_1-mal eingetreten, so ist der Quotient $h_n(A) = \frac{m_1}{n_1}$ die relative Häufigkeit von *A*.
Beispiel: Wirft man den Würfel sehr oft und notiert die Anzahl der auftretenden Einsen, so kann man feststellen, daß die relative Häufigkeit von *A* = {1} um den Wert 1/6 = 0,1666 schwankt.

Es existiert im allgemeinen Fall ein fester Wert, um den die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses schwankt und dem sie sich um so mehr nähert, je größer die Anzahl der Versuche ist. Diese Konstante nennt man die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses *A* und bezeichnet sie mit *P*(*A*); $[0 \leq P(A) \leq 1]$; (Grenzwertsatz Bernoulli).
(Nur für endlich viele, gleichmögliche Versuchsausgänge gilt die klass. Definition der Wahrscheinlichkeit.)

Die Addition von Wahrscheinlichkeiten

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Die Additionsregel verknüpft Wahrscheinlichkeiten von zufälligen Ereignissen, die in einer Entweder – Oder – Beziehung zueinander stehen.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei einem Wurf die Zahl 3 und 5 erhält, ist

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Bei nicht unvereinbaren Ereignissen gilt:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatspiel eine rote bzw. eine Bildkarte zu ziehen?

$$P(Bildkarte) = P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$P(roteKarte) = P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = P(A) + P(B) - [P(A) \cap P(B)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{32} = \frac{5}{8}$$

$$P(C) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *A* unter der Bedingung, daß das Ereignis *B* schon eingetreten ist, heißt Wahrscheinlichkeit von *A* unter der Bedingung *B*:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(B) \neq 0$

Multiplikation der Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit des "sowohl – als auch", gleichzeitiges Eintreten mehrerer Ereignisse

Für 2 beliebige Ereignisse: $P(A \cap B) = P(A) * P(B / A)$

Für unabhängige Ereignisse: $P(A \cap B \cap C \cap ...) = P(A) * P(B) * P(\mathrm{C}) * ...$

Beispiel: Zieht man aus einem Kartenspiel (32 Karten) eine Karte, so ist die Wahrscheinlichkeit, einen König zu ziehen $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Ist die gezogene Karte ein König und zieht man eine weitere Karte, so ist die Wahrscheinlichkeit, wieder einen König zu ziehen $P(A/B) = \frac{3}{31}$.

Die Wahrscheinlichkeit, zwei Könige mit zwei Karten zu ziehen, ist

$$P(C) = P(B) * P(A/B) = \frac{1}{8} * \frac{3}{31} \approx 0{,}012 \cdot$$

Für k unabhängige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

sie gleichzeitig auftreten $P = P(A_1) * P(A_2) * \ldots * P(A_k)$

keines eintritt $P = [1 - P(A_1)] * [1 - P(A_2)] * \ldots * [1 - P(A_k)]$

mindestens eines eintritt $P = 1 - [1 - P(A_1)] * [1 - P(A_2)] * \ldots * [1 - P(A_k)]$

Letzte Änderung:21.02.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*