Biometrieübung 6
t-Test, Welch-Test, Mann-Whitney-Test

Aufgabe

---

1. Düngeversuch I

Bei einem Düngeversuch werden die folgenden Pflanzenhöhen (in cm) gemessen:

Dünger Nr. 1	Dünger Nr. 2
48.2	52.3
54.6	57.4
58.3	55.6
47.8	53.2
51.4	61.3
52.0	58.0
55.2	59.8
49.1	54.8
49.9	
52.6	

. Prüfen sie, ob sich die Pflanzenhöhen der beiden Gruppen signifikant unterscheiden.
b. Prüfen Sie, ob Düngevariante 1 zu höheren Pflanzen führt als Düngevariante 2.
c. Prüfen Sie, ob Düngevariante 2 zu höheren Pflanzen führt als Düngevariante 1.

2. Düngeversuch II

Bei einem Düngeversuch werden die folgenden Ergebnisse ermittelt:

$n_1 = 10$	$n_2 = 10$
$FG_1 = 9$	$FG_2 = 9$
$\bar{x}_1$ = 51.91 cm	$\bar{x}_2$ = 54,73 cm
SS_1 = 91,98 cm^2	SS_2 = 62.28 cm^2
s_1^2 = 10.22 cm^2	s_2^2 = 6.92 cm^2

. Prüfen sie, ob sich die Pflanzenhöhen der beiden Gruppen signifikant unterscheiden.
b. Prüfen Sie, ob sich die Pflanzenhöhen der beiden Gruppen signifikant unterscheiden unter der

Annahme, daß die Varianzen möglicherweise ungleich sind.

3. Plattfischart

Es soll das mittlere Gewicht von dreijährigen Tieren einer Plattfischart im Jahr 1990 (II) mit den Ergebnissen aus der Literatur von 1970 (I) für die gleiche Tiergruppe verglichen werden. Prüfen sie, ob sich die Gewichte der dreijährigen Tiere von 1970 und 1990 signifikant unterscheiden.

	I	**II**
$\bar{x}$	50,5	65,5
s	5,15	6,21
n	40	38
min	41	53
max	61	77

4 Körperlänge von Affen

Ein Primatologe hat auf einer Südseeinsel die Körperlänge von 12 Affen gemessen und möchte nun wissen, ob sich die Körpergröße der weiblichen von der Körpergröße der männlichen Affen unterscheidet. Benutzen sie einen nichtparametrischen Test!

Körpergröße der männlichen Affen [cm]	**Körpergröße der weiblichen Affen [cm]**
193	175
188	173
185	168
183	165
180	163
178	
170	

5 Alkoholmenge

An einem Reaktionsgerät werden 12 Personen (Gruppe 1) mit einer bestimmten Alkoholmenge und 15 Personen (Gruppe 2), die zusätzlich Präparat A eingenommen haben, getestet. Es haben sich folgende Reaktionszeiten ergeben (in Sekunden).

Gruppe 1	Gruppe 2
85	96
106	105
118	104
81	108
138	86
90	84
112	99
119	101
107	78
95	124
88	121
103	97
	129
	87
	109

Sind die Reaktionszeiten nach Einnahme des Präparats geringer als ohne Einnahme? Benutzen sie einen nichtparametrischen Test!

Letzte Änderung: 15.07.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 6
t-Test, Welch-Test, Mann-Whitney-Test

Lösung

Aufgabe 1: Düngeversuch

Voraussetzung: beide Grundgesamtheiten normalverteilt mit gleichen aber unbekannten Varianzen.

a)

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

	Dünger Nr. 1	Dünger Nr. 2
Anzahl	10	8
Mittelwert [cm]	51,91	56,55
Varianz [cm²]	11,36	9,88
Standardabweichung [cm]	3,37	3,14

$$\hat{t} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_D} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

$$s_D = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{(10-1)\cdot 11{,}36 + (8-1)\cdot 9{,}88}{10+8-2}} = \sqrt{\frac{102{,}24 + 69{,}16}{16}} = 3{,}273$$

$$\hat{t} = \frac{|51{,}91 - 56{,}55|}{3{,}273} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 8}{10+8}} = 1{,}41766 \cdot \sqrt{4{,}4\bar{4}} = 2{,}99$$

$$FG = \nu = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$$
$$\alpha = 0{,}05$$

$$t_{0,05(2);16} = 2{,}12$$

Da $\hat{t} = 2{,}99 > t_{0,05(2);16} = 2{,}12$ wird H_0 abgelehnt. Die Pflanzenhöhen der beiden Gruppen unterscheiden sich signifikant.

b)

$$H_0: \ \mu_1 \le \mu_2$$
$$H_A: \ \mu_1 > \mu_2$$

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_D} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

In der Formel darf der Betrag von $\bar{x} - \bar{y}$ nur für das errechnen des t-Wertes bei der zweiseitigen Fragestellung verwendet werden. Bei der einseitigen Fragestellung gilt die Formel ohne Betrag von $\bar{x} - \bar{y}$. Es kann auch grundsätzlich die Formel ohne Betrag verwendet werden, aber dann muß, bei der zweiseitigen Fragestellung beim Vergleich des errechneten mit dem aus der Tabelle entnommenen t-Wertes, der Betrag von dem errechneten t-Wertes gebildet werden (siehe unten allgemeine Regeln für die Ablehnung von Hypothesen).

$$\hat{t} = \frac{51{,}91 - 56{,}55}{3{,}273} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 8}{10 + 8}} = -1{,}41766 \cdot \sqrt{4{,}4\bar{4}} = -2{,}99$$
$$t_{0,05(1);16} = 1{,}746$$

Da $\hat{t} = -2{,}99 < t_{0,05(1);16} = 1{,}746$ wird die H_0 nicht abgelehnt. Die Düngevariante 1 führt nicht zu höheren Pflanzen als die Düngevariante 2.

c)

$$H_0: \ \mu_1 \ge \mu_2$$
$$H_A: \ \mu_1 < \mu_2$$

$$\hat{t} = -2{,}99$$
$$t_{0,05(1);16} = 1{,}746$$

Da $\hat{t} = -2{,}99 < t_{0,05(1);16} = -1{,}746$ wird die H_0 abgelehnt. Die Düngevariante 2 führt zu höheren Pflanzen als die Düngevariante 1.

Allgemein gilt:

Für H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$, falls $|\hat{t}| \geq t_{\alpha(2);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt (H_0: $\mu_1 = \mu_2$)

Für H_A: $\mu_1 < \mu_2$, falls $\hat{t} \leq -t_{\alpha(1);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt (H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$)

Für H_A: $\mu_1 > \mu_2$, falls $\hat{t} \geq t_{\alpha(1);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt (H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$)

Aufgabe 2: Düngeversuch II

a)

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\hat{t} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{51{,}91 - 54{,}73}{\sqrt{\frac{10{,}22 + 6{,}92}{10}}} = 2{,}154$$

FG = $n_1 + n_2 - 2 = 18$

$$\alpha = 0{,}05$$

$$t_{0,05(2);18} = 2{,}101$$

Da $\hat{t} = 2{,}154 > t_{0,05(2);18} = 2{,}101$ wird H_0 abgelehnt. Die Pflanzenhöhen der beiden Gruppen unterscheiden sich signifikant.

b)

Die Standardabweichung in den Grundgesamtheiten, σ_1 und σ_2 , sind nicht – wie beim t-Test – gleich => Welch-Test verwenden.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\hat{t} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{|51{,}91 - 54{,}73|}{\sqrt{\frac{10{,}22}{10} + \frac{6{,}92}{10}}} = 2{,}15$$

$$c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \frac{1{,}022}{1{,}022 + 0{,}682} = 0{,}596$$

$$\nu = \frac{1}{\frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1}} = \frac{1}{\frac{0{,}596^2}{10-1} + \frac{(1-0{,}596)^2}{10-1}} = 17{,}357 \approx 17$$

$$\alpha = 0{,}05$$
$$t_{0,05(2);17} = 2{,}11$$

Da $\hat{t} = 2{,}15 > t_{0,05(2);17} = 2{,}11$ wir H_0 abgelehnt. Auch unter der Annahme, daß die Varianzen ungleich sind, unterscheiden sich die Pflanzenhöhen der beiden Gruppen signifikant.

---

3. Plattfischart

Anwendung des t-Test für den Vergleich zweier unabhängiger normalverteilter Stichproben

H_0: $\mu_I = \mu_{II}$

H_A: $\mu_I \neq \mu_{II}$

$$\hat{t} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_D} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

$$s_D = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\hat{t} = \frac{|50,5 - 65,5|}{\sqrt{\frac{1034,38 + 1426,87}{40 + 38 - 2}}} \cdot \sqrt{\frac{40 \cdot 38}{40 + 38}} = 11,64$$

FG = 40 + 38 – 2 = 76

Irrtumswahrscheinlichkeit α = 0,05

Da $\hat{t}$ = 11,64 > $t_{76;0,05}$ = 1,99 ist, wird die Nullhypothese abgelehnt. Damit sind die beobachteten Unterschiede hinsichtlich des mittleren Gewichtes nicht auf Zufallseinflüsse zurückzuführen. Die dreijährigen Tiere weisen 1990 ein signifikant höheres Gewicht als 1970 auf. Das deutet auf eine Verbesserung des Wachstums hin.

---

4 Körperlänge von Affen

Körpergröße der männlichen Affen [cm]	**Körpergröße der weiblichen Affen [cm]**	**Rang der männlichen Affen**	**Rang der weiblichen Affen**
193	175	1	7
188	173	2	8
185	168	3	10
183	165	4	11
180	163	5	12
178		6	
170		9	
$n_1 = 7$	$n_2 = 5$	$R_1 = 30$	$R_2 = 48$

H_0: Männliche und weibliche Affen haben die gleiche Körperlänge

H_1: Männliche und weibliche Affen haben unterschiedliche Körperlängen

Anwendung des U-Tests von Mann und Whitney (Mann-Whitney-Test)

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$
$$= (7)(5) + \frac{(7)(8)}{2} - 30$$
$$= 35 + 28 - 30 = 33$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$
$$= (7)(5) + \frac{(5)(6)}{2} - 48$$
$$= 35 + 15 - 48 = 2$$

oder $U_2 = n_1 \cdot n_2 - U_1$

Probe: $n_1 \cdot n_2 = U_1 + U_2 = 35$

$$U_{0,05(2);7;5} = U_{0,05(2);5;7} = 5$$

$$\hat{U} = \min(U_1; U_2) = 2$$

Da $\hat{U} = 2 < U_{0,05(2);5;7} = 5$ ist, wird H_0 abgelehnt.
Die Körperlängen von männlichen und weiblichen Affen unterscheiden sich signifikant.

---

5 Alkoholmenge

Anwendung des U-Tests von Mann und Whitney (Mann-Whitney-Test)

Gruppe 1	Gruppe 2	Ränge1	Ränge2
85	96	4	10
106	105	17	16
118	104	22	15
81	108	2	19

138	86	27	5
90	84	8	3
112	99	21	12
119	101	23	13
107	78	18	1
95	124	9	25
88	121	7	24
103	97	14	11
	129		26
	87		6
	109		20
n_1 = 12	**n_2 = 15**	**172**	**206**

H_0: Die Reaktionszeiten unterscheiden sich nicht oder sind ohne Einnahme des Präparats geringer.
H_1: Die Reaktionszeiten sind nach Einnahme des Präparats geringer.

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$= 12 \cdot 15 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 172$$

$$= 86$$

$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

$$= 12 \cdot 15 + \frac{15 \cdot 16}{2} - 206$$

$$= 94$$

$$\hat{U} = \min(U_1; U_2)$$

$$= \min(86; 94)$$

$$= 86$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$$U_{0,05(2);12;15} = 55$$

Da $\hat{U} = 86 > U_{0,05(2);12;15} = 55$ wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.
H_0 kann nicht verworfen werden, die Reaktionszeiten sind nach Einnahme des Präparats nicht geringer.

Letzte Änderung: 17.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 6
t-Test, Welch-Test, Mann-Whitney-Test

Formeln

Inhalt

Vergleich zweier unabhängiger Stichproben (t-Test)

Fragestellung: sind die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zweier unabhängiger Stichproben X und Y signifikant verschieden?
Voraussetzung: beide Grundgesamtheiten normalverteilt mit gleichen, unbekannten Varianzen; unabhängige Stichproben

H_0: $\mu_x = \mu_y$

H_A: $\mu_x \neq \mu_y$

Rechenweg:

1. Berechne

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_D} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

bei zweiseitiger Fragestellung auch

$$\hat{t} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_D} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

falls $n_1 = n_2 = n$

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_D} \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2 + s_y^2}{n}}}$$

n_1 = Umfang Stichprobe X
n_2 = Umfang Stichprobe Y

$\bar{x}$ und $\bar{y}$ die jeweiligen Mittelwerte

$$s_D = \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left[\left(\sum x^2\right) - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n_1} + \left(\sum y^2\right) - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n_2}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

oder

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

2. t-Wert aus t-Tabelle

$$t_{\alpha(2),\nu}$$

FG = ν = $n_1 + n_2 - 2$

$\alpha = 0{,}05$

FG (Anzahl der Freiheitsgrade) ergibt sich aus Stichprobenumfang n und wird i.d.R. vermindert um die Anzahl der Parameter, die aus Stichprobe geschätzt werden, hier: 2 Mittelwerte

3. Vergleiche Prüfgröße und Tabellenwert

(x entspricht 1; und y entspricht 2)

Für H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ (H_0: $\mu_1 = \mu_2$), falls $|\hat{t}| \geq t_{\alpha(2);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt

Für H_A: $\mu_1 < \mu_2$ (H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$), falls $\hat{t} \leq -t_{\alpha(1);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt

Für H_A: $\mu_1 > \mu_2$ (H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$), falls $\hat{t} \geq t_{\alpha(1);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt

---

Welch-Test

Dieser Test wird angewendet, wenn zwei Meßwertreihen unter folgenden Bedingungen hinsichtlich der Lage miteinander zu vergleichen sind:

- Die Meßwerte sind Stichproben aus Grundgesamtheiten mit normalverteilten oder annähernd normalverteilten Zufallsgrößen $N(\mu_1;\sigma_1)$ und $N(\mu_2;\sigma_2)$
- Die Standardabweichung in den Grundgesamtheiten, σ_1 und σ_2 , sind nicht – wie beim t-Test – gleich.

Hypothesen:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$

Rechenweg:

Aus den beiden Meßwertreihen mit den Umfängen n_1 und n_2 berechnet man die Stichproben-Mittelwerte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ und die Stichproben-Varianzen s_1^2 und s_2^2 .

Als Prüfgröße dient der Ausdruck

$$\hat{t} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Die beim Welch-Test maßgebende Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich nicht direkt aus den beiden Stichprobenumfängen, sondern muß berechnet werden. Hierzu bestimmt man die Hilfsgröße

$$c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

und daraus die genäherte Anzahl der Freiheitsgrade

$$\nu = \frac{1}{\dfrac{c^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(1-c)^2}{n_2 - 1}}$$

ν ist i.a. keine ganze Zahl. Daher wird ν auf die nächste ganze Zahl abgerundet. ν ist die Zahl der Freiheitsgrade, mit der in einer Tabelle der kritische Wert zur Irrtumswahrscheinlichkeit α ermittelt wird.

Vergleich von $\hat{t}$ und dem Tabellenwert $t_{0,05(2);\nu}$

Für H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ (H_0: $\mu_1 = \mu_2$), falls $|\hat{t}| \geq t_{\alpha(2);FG}$, dann wird H_0 abgelehnt

---

Mann-Whitney-Test (U-Test)

-verteilungsunabhängiges (oder parameterfreies) Verfahren, daß heißt, es werden keine Voraussetzungen an die Verteilungsform gestellt

Drei wichtige Gründe für die Anwendung verteilungsunabhängiger Verfahren:

1. Es liegen ordinale Daten vor, z. B. in Form von Rangfolgen.
2. Es liegen metrische Daten vor, von denen man von vornherein weiß, daß ihre Variationen dem Gesetz der Normalverteilung nicht folgt; gleichzeitig ist der Stichprobenumfang nur mäßig groß, so daß unsicher ist, ob für die Mittelwerte-Verteilung schon eine Normalverteilung unterstellt werden darf.
3. Es liegen metrische Daten geringen Umfanges vor, über deren Verteilung überhaupt nichts bekannt ist.

Ein wichtiger Vertreter aus der Gruppe der verteilungsunabhängigen Signifikanztests ist der Mann-Whitney-Test.

Anwendung des Mann-Whitney-Test:

1. In der gemeinsamen geordneten Rangreihe der Länge $n_1 + n_2$ ordnet man den Meßwerten die Rangnummern 1 bis $n_1 + n_2$ zu, notiert aber die Rangnummern nach beiden Proben getrennt.
2. Berechne für jede Probe die Summe der auf sie entfallenden Rangnummern; diese heißen auch die Rangsummen und werden mit R_1 und R_2 bezeichnet.
3. Aus R_1 und R_2 werden die Größen U_1 und U_2 durch folgende Formeln bestimmt:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2$$

4. Als Prüfgröße U gilt die kleinere der beiden Zahlen U_1 und U_2:
   $U = \min(U_1, U_2)$
5. Ablesen des kritischen Wertes $U_{\alpha(2);n_1,n_2}$ aus einer Tabelle
6. Vergleiche Prüfgröße und Tabellenwert; H_0 wird verworfen, falls $U \leq U_{\alpha(2);n_1,n_2}$

Letzte Änderung: 15.07.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 6
t-Test, Welch-Test, Mann-Whitney-Test

Tabelle der Signifikanzschranken der t-Verteilung

Freiheits-grade	Irrtumswahrscheinlichkeit für den zweiseitigen Test						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689

28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
42	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	3,296	3,538
44	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692	3,286	3,526
46	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687	3,277	3,515
48	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682	3,269	3,505
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
55	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	3,245	3,476
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
65	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	3,220	3,447
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
1000	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300
	0,10	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
Freiheits-grade	**Irrtumswahrscheinlichkeit für den einseitigen Test**						

zurück

Letzte Änderung: 15.07.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 6
t-Test, Welch-Test, Mann-Whitney-Test

Kritische Werte von U für den Test von Mann-Whitney (auch U-Test) für den einseitigen Test: α =0,05; zweiseitigen Test: α =0,10

n_1	n_2																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
l	-																			
2	-	-																		
3	-	-	0																	
4	-	-	0	1																
5	-	0	1	2	4															
6	-	0	2	3	5	7														
7	-	0	2	4	6	8	11													
8	-	1	3	5	8	10	13	15												
9	-	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	-	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	-	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	-	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	-	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	-	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	-	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	-	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	-	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	-	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	0	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	0	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
21	0	5	11	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146
22	0	5	12	20	28	36	44	52	60	68	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154
23	0	5	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	98	107	116	125	134	143	152	161
24	0	6	13	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169
25	0	6	14	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177
26	0	6	15	24	33	43	53	62	72	82	92	103	113	123	133	143	154	164	174	185

27	0	7	15	25	35	45	55	65	75	86	96	107	117	128	139	149	160	171	182	192
28	0	7	16	26	36	46	57	68	78	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200
29	0	7	17	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	138	150	162	173	185	196	208
30	0	7	17	28	39	50	61	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216
31	0	8	18	29	40	52	64	76	88	100	112	124	136	149	161	174	186	199	211	224
32	0	8	19	30	42	54	66	78	91	103	116	128	141	154	167	180	193	206	218	231
33	0	8	19	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	172	186	199	212	226	239
34	0	9	20	32	45	57	70	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247
35	0	9	21	33	46	59	73	86	100	114	128	141	156	170	184	198	212	226	241	255
36	0	9	21	34	48	61	75	89	103	117	131	146	160	175	189	204	219	233	248	263
37	0	10	22	35	49	63	77	91	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271
38	0	10	23	36	50	65	79	94	109	124	139	154	170	185	201	216	232	247	263	278
39	1	10	23	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286
40	1	11	24	39	53	68	84	99	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294

Kritische Werte von U für den Test von Mann-Whitney (auch U-Test) für den einseitigen Test: α =0,025; zweiseitigen Test: α =0,05

n_1	n_2																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	-																			
2	-																			
3	-	-	-																	
4	-	-	-	0																
5	-	-	0	1	2															
6	-	-	1	2	3	5														
7	-	-	1	3	5	6	8													
8	-	0	2	4	6	8	10	13												
9	-	0	2	4	7	10	12	15	17											
10	-	0	3	5	8	11	14	17	20	23										
11	-	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30									
12	-	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37								
13	-	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45							
14	-	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55						
15	-	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64					

16	-	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75				
17	-	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87			
18	-	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99		
19	-	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	
20	-	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
21	-	3	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134
22	-	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141
23	-	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149
24	-	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156
25	-	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	163
26	-	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171
27	-	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178
28	-	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186
29	-	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193
30	-	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200
31	-	5	14	24	34	45	56	67	78	90	101	113	125	136	148	160	172	184	196	208
32	-	5	14	24	35	46	58	69	81	93	105	117	129	141	153	166	178	190	203	215
33	-	5	15	25	37	48	60	72	84	96	108	121	133	146	159	171	184	197	210	222
34	-	5	15	26	38	50	62	74	87	99	112	125	138	151	164	177	190	203	217	230
35	-	6	16	27	39	51	64	77	89	103	116	129	142	156	169	183	196	210	224	237
36	-	6	16	28	40	53	66	79	92	106	119	133	147	161	174	188	202	216	231	245
37	-	6	17	29	41	55	68	81	95	109	123	137	151	165	180	194	209	223	238	252
38	-	6	17	30	43	56	70	84	98	112	127	141	156	170	185	200	215	230	245	259
39	0	7	18	31	44	58	72	86	101	115	130	145	160	175	190	206	221	236	252	267
40	0	7	18	31	45	59	74	89	103	119	134	149	165	180	196	211	227	243	258	274

zurück

Letzte Änderung: 15.07.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*