Biometrieübung 17
Lateinische Quadrate

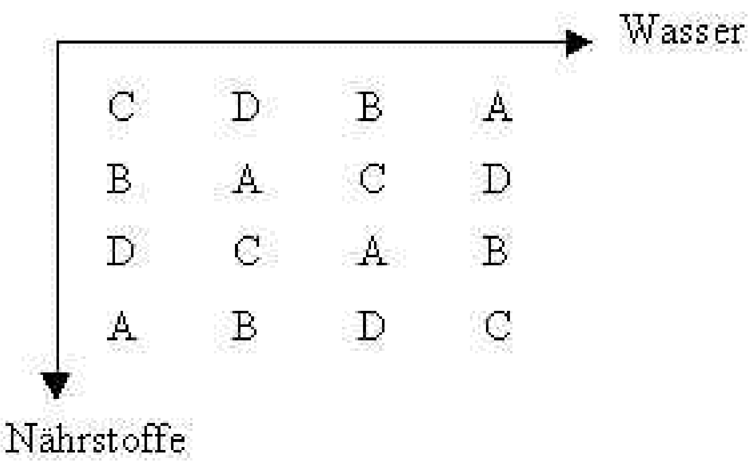
Aufgabe

---

1. Weizenerträge

In einem Versuch soll die Wirkung vier verschiedener Düngerdosierungen A bis D auf die Weizenerträge untersucht werden. Das zur Verfügung stehende Versuchsgelände ist jedoch nicht standörtlich homogen. In einer Richtung variiert der Wasserhaushalt, in der dazu senkrechten Richtung der Nährstoffhaushalt. Diese beiden Faktoren sollen mit Hilfe der Lateinischen Quadrate in die Versuchsplanung, -durchführung und -auswertung mit einbezogen werden. Die dazu notwendigen 16 Versuchseinheiten werden entlang der sich ändernden Störfaktoren "Wasser" und "Nährstoffe" gruppiert.

Die Behandlungen A bis D werden unter Beachtung der oben genannten Restriktionen den Versuchseinheiten zufällig zugeordnet.



Die Versuchseinheiten werden mit der entsprechenden Dosierung gedüngt und die Weizenerträge bei der Ernte in kg pro Versuchseinheit bestimmt:

Zeile	Spalte				S
	1	2	3	4	
1	C: 10,5	D: 7,7	B: 12,0	A: 13,2	43,4
2	B: 11,1	A: 12,0	C: 10,3	D: 7,5	40,9
3	D: 5,8	C: 12,2	A: 11,2	B: 13,7	42,9

4	A: 11,6	B: 12,3	D: 5,9	C: 10,2	40,0
S	39,0	44,2	39,4	44,6	167.2

Werten Sie den Versuch mit Hilfe der Lateinischen Quadrate aus!

Letzte Änderung: 01.03.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 17
Lateinische Quadrate

Lösung

---

1. Weizenerträge

Spalte	1	2	3	4	Zeilensumme
Zeile **1** **2** **3** **4**	 C: 10,5 B: 11,1 D: 5,8 A: 11,6	 D: 7,7 A: 12,0 C: 12,2 B: 12,3	 B: 12,0 C: 10,3 A: 11,2 D: 5,9	 A: 13,2 D: 7,5 B: 13,7 C: 10,2	 43,4 40,9 42,9 40,0
Spaltensummen	39,0	44,2	39,4	44,6	167,2

Behandlungssummen:

A: 48,0
B: 49,1
C: 43,2
D: 26,9

$\sum \sum x^2 = 10{,}5^2 + .. + 10{,}2^2 = 1837{,}64$

$(\sum \sum x)^2 / N = 167{,}2^2 / 16 = 1747{,}24$

Nach den Rechenformeln berechnen sich die Streuungen folgendermaßen:

$SQ_{Ges} = 1837{,}64 - 1747{,}24 = 90{,}40$
$SQ_{Beh} = (48{,}0^2 + .. + 26{,}9^2) / 4 - 1747{,}24 = 78{,}93$
$SQ_{Zeile} = (43{,}4^2 + .. + 40{,}0^2) / 4 - 1747{,}24 = 1{,}95$
$SQ_{Spalte} = (39{,}0^2 + .. + 44{,}6^2) / 4 - 1747{,}24 = 6{,}80$
$SQ_{Fehler} = 90{,}40 - 78{,}93 - 1{,}95 - 6{,}60 = 2{,}272$

Streuungsquelle	SQ	FG	MQ	F
Zeile	1,95	3		
Spalte	6,80	3		
Behandlung	78,93	3	26,31	58,47
Fehler	2,72	6	0,45	
Gesamt	90,40	15		

Der Vergleich mit $F_{0,05(1),3,6}$ = 4,76 führt zum Ablehnen der Nullhypothese H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, da der berechnete F-Wert größer als der Tabellenwert ist. Die Wirkung der verschiedenen Düngerdosierungen auf den Weizenertrag unterscheiden sich signifikant.

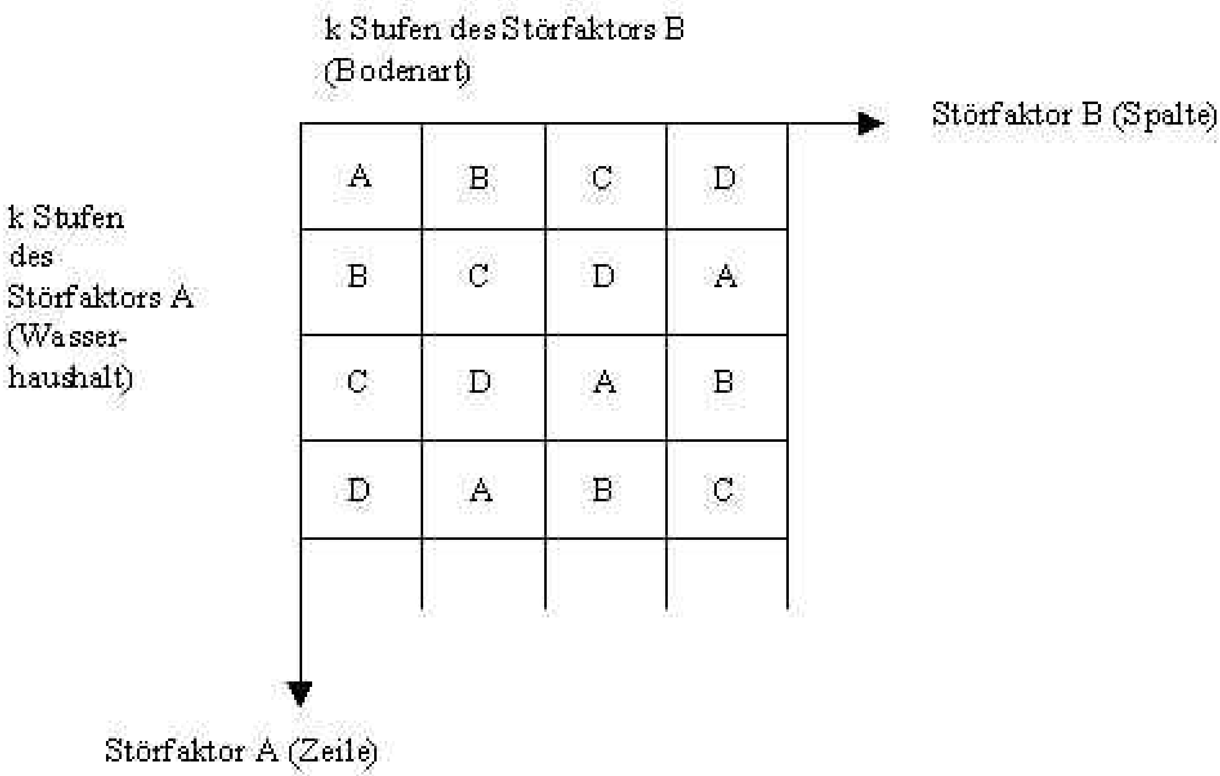
Letzte Änderung: 20.09.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 17
Lateinische Quadrate

Formeln

Lateinische Quadrate (Latin Squares)

Bei der Versuchsanlage der Lateinischen Quadrate werden zwei Störfaktoren in den Versuch mit einbezogen: es handelt sich um eine doppelte Blockbildung. Demnach werden drei Planfaktoren berücksichtigt: der eigentliche Prüffaktor und die beiden Störfaktoren. Oft bezieht sich diese Versuchsanordnung auf räumliche Störfaktoren im Gelände. So kann beispielsweise die Standortsgüte in zwei Richtungen einen Trend aufweisen:



Um die Störfaktoren bei der Versuchsanlage mitzuerfassen, werden die Versuchseinheiten nach der Ausprägung der Störfaktoren gruppiert.
Bei der Varianzanalyse können die Streuungen, die auf die beiden Störfaktoren zurückzuführen sind, von SQ_{Fehler} getrennt werden; SQ_{Fehler} des Lateinischen Quadrates ist bei wesentlichen Störfaktoren gegenüber der vollkommen randomisierten Anlage und der Blockanlage reduziert. Die Gesamtstreuung SQ_{Ges} wir in vier Komponenten zerlegt:

$$SQ_{Ges} = SQ_{Beh} + SQ_{Zeilen} + SQ_{Spalten} + SQ_{Fehler}$$

	Freiheitsgrade (FG)
$SQ_{Gesamt} = \sum\sum$ (Einzelwerte - Gesamtmittel)²	n - 1

$SQ_{Behandlung} = \sum$ k * (Behandlungsmittelwert - Gesamtmittel)²	k - 1
$SQ_{Zeile} = \sum$ k * (Zeilenmittel - Gesamtmittel)²	k - 1
$SQ_{Spalte} = \sum$ k * (Spaltenmittel - Gesamtmittel)²	k - 1
$SQ_{Fehler} = SQ_{Gesamt} - SQ_{Behandlung} - SQ_{Zeile} - SQ_{Spalte}$	(k - 1) * (k - 2)

mit k = Anzahl der Behandlungen

Zur Berechnung werden folgende Formeln verwendet:

$$K.T. = \frac{\left(\sum \text{Einzelwert e}\right)^2}{n}$$ (Korrekturterm)

$$SQ_{Ges} = \sum \text{Einzelwert e}^2 - K.T.$$

$$SQ_{Beh} = \frac{\left(\sum \text{Behandlung ssummen}^2\right)}{k} - K.T.$$

$$SQ_{Zeile} = \frac{\left(\sum \text{Zeilensumm en}^2\right)}{k} - K.T.$$

$$SQ_{Spalte} = \frac{\left(\sum \text{Spaltensummen}^2\right)}{k} - K.T.$$

$$SQ_{Fehler} = SQ_{Ges} - SQ_{Beh} - SQ_{Zeilen} - SQ_{Spalten}$$

$$F = \frac{MQ_{Beh}}{MQ_{Fehler}} = \frac{\frac{SQ_{Beh}}{k-1}}{\frac{SQ_{Fehler}}{(k-1)(k-2)}}$$

Zur Prüfung der Nullhypothese H_0: $\mu_1 = ... = \mu_k$ wird der berechnete F-Wert mit dem Tabellenwert für k-1 und (k-1)(k-2) Freiheitsgraden verglichen. Wenn der berechnete Wert größer als der Tabellenwert ist, wird die Nullhypothese abgelehnt.

Wann kann die Versuchsanlage der Lateinischen Quadrate angewendet werden?

Auch für die lateinischen Quadrate gilt, was bereits für die Blockanlage erläutert wurde:

Der Verlust an Freiheitsgraden für SQ_{Fehler} darf nicht größer sein als der Gewinn an Präzision (d. h. Reduktion von SQ_{Fehler}). Verfahren zur Beurteilung der Effektivität der Lateinischen Quadrate finden sich z. B. bei Steel and Torrie (S. 152) und Van Laar (S.445). Üblicherweise werden Lateinische Quadrate mit fünf bis acht Behandlungen angelegt. Bei vier und weniger Behandlungen bleiben nur noch wenige Freiheitsgrade für SQ_{Fehler}: Bei mehr als acht Behandlungen wird die Zahl der Versuchseinheiten zu groß, der Versuch droht unwirtschaftlich zu werden.
Eine wesentliche Bedingung für die Verwendung der lateinischen Quadrate ist, daß zwischen dem Prüffaktor und den beiden Störfaktoren keine Wechselwirkungen bestehen dürfen (siehe dazu Kapitel 4.2.4). Bei vorhandener Wechselwirkung folgt das berechnete F nicht mehr der F-Verteilung, damit verliert der F-Test an Gültigkeit.

Letzte Änderung: 22.09.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Biometrieübung 17
Lateinische Quadrate

Tabelle der Signifikanzschranken der F-Verteilung für α = 0,05 für verschiedene m_1 und m_2.

		m_1 (FG$_1$)																							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	
	1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	**1**
	2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49	**2**
	3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,55	8,54	8,53	**3**
	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,87	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	**4**
	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,41	4,39	4,37	**5**
	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,73	3,71	3,69	3,68	**6**
	7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,53	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,27	3,25	3,24	**7**
	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,24	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,99	2,97	2,95	2,94	**8**
	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,03	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	**9**
	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,86	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,59	2,56	2,55	**10**
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,47	2,46	2,43	2,42	**11**
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,37	2,35	2,32	2,31	**12**
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,22	**13**
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	**14**
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,42	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,14	2,12	2,10	2,08	**15**
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,37	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07	2,04	2,02	**16**
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	**17**
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	**18**
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	**19**
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,22	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,93	1,91	1,88	1,86	**20**
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,20	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,90	1,88	1,84	1,83	**21**
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,17	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,87	1,85	1,82	1,80	**22**
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,15	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	**23**
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,13	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,77	1,75	**24**
m_2	**25**	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,11	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,78	1,75	1,73	**25**
FG$_2$	**26**	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,09	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,73	1,71	**26**
	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,08	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,81	1,76	1,74	1,71	1,69	**27**
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,75	1,73	1,69	1,67	**28**
	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,05	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,77	1,73	1,71	1,67	1,65	**29**
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,70	1,66	1,64	**30**
	32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,01	1,97	1,91	1,86	1,82	1,77	1,74	1,69	1,67	1,63	1,61	**32**
	34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	1,99	1,95	1,89	1,84	1,80	1,75	1,71	1,67	1,65	1,61	1,59	**34**
	36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	**36**
	38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,96	1,92	1,85	1,81	1,76	1,71	1,68	1,63	1,61	1,57	1,54	**38**
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	**40**
	42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,60	1,57	1,53	1,51	**42**
	44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,92	1,88	1,81	1,77	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,52	1,49	**44**
	46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97	1,91	1,87	1,80	1,76	1,71	1,65	1,62	1,57	1,55	1,51	1,48	**46**
	48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96	1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	**48**
	50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	**50**
	55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,53	1,50	1,46	1,43	**55**
	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,51	1,48	1,44	1,41	**60**
	65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90	1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	**65**
	70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,48	1,45	1,40	1,37	**70**
	80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	**80**
	100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	**100**

125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83	1,77	1,73	1,66	1,60	1,55	1,49	1,45	1,40	1,36	1,31	1,27	**125**
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,48	1,44	1,38	1,34	1,29	1,25	**150**
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	**200**
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,17	**400**
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	**1000**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**14**	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	

zurück

Letzte Änderung: 20.08.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*