Mathematikübung 3
(nach Dr. R. Storm)

Aufgabe

---

15. Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) $\log_2 4$ b) $\lg \sqrt{10}$ c) $\ln(2e)$ d) $\ln \frac{2}{e}$

e) $\log_4 2$ f) $\ln(e^2) - \log_2(a^2)$ g) $2\ln(e^2) - e^{2\ln 2}$

16. Bilden Sie die erste und zweite Ableitung:

a) $y = (2x+3)^3$ b) $y = (x^2+2)^3$ c) $y = \frac{x+2}{x}$; $(x \neq 0)$

d) $y = (x-1)e^x$ e) $y = \sin x \cdot \cos x$ f) $y = \ln^2 x$; $(x > 0)$

g) $y = \frac{\ln x}{x}$; $(x > 0)$ h) $y = xe^{\sqrt{x}}$ i) $y = (1 - e^{-2x})^2$

j) $y = \frac{1}{1+e^{-bx}}$; $(b > 0)$ k) $y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$, $(a,b > 0)$

17. Man diskutiere die Funktion

$$y = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$$

, $(a \geq 0)$

(a, b positive Konstanten) für a = 1 und b = 1 bzw. 2 bzw. 3 (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Asymtoten) und skizzieren sie.

18. Man untersuche folgende sog. Wachstumsfunktionen

- $y = \dfrac{a}{1 + c \cdot e^{-bx}}$,(x $\geq$ 0) (logistische Funktion)

b. $y = a\left(1 - e^{-bx}\right)$,(x $\geq$ 0) ("Ertragsgesetz" von MITSCHERLING, Spezialfall der RICHARDS-Funktion)

(a, b, c positive Konstanten) auf Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Asymptoten und skizziere sie. Dazu setze man 1) a = b = c = 1, 2) a = b = 1, c = 2

Letzte Änderung: 10.05.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*

Mathematikübung 3

Lösung

---

15 a) $\log_2 4 = x$

Logarithmus von 4 zur Basis 2

$4 = 2^x$

$x = 2$

15 b) $\lg\left(\sqrt{10}\right) = \log_{10}\left(10^{\frac{1}{2}}\right) = x$

$10^{\frac{1}{2}} = 10^x$

$x = \frac{1}{2}$

15 c) $\ln(2e) = \log_e(2e) = x$

$2e = e^x$

$2 = e^{x-1}$

$\ln 2 = x-1$

$x = \ln 2 + 1$

oder $\ln(2e) = x$

$$\ln 2 + \ln e = x$$

$$\ln 2 + 1 = x$$

15 d) $\ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln 2 - \ln e = \ln 2 - 1$

15 e) $\log_4 2 = x$

$$2 = 4^x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

15 f) $\ln\left(e^2\right) - \log_2\left(a^2\right)$

links: $\ln\left(e^2\right) = 2 \cdot \ln e = 2$

rechts: $\log_2\left(a^2\right) = 2 \cdot \log_2 a$

$$= 2 - 2 \cdot \log_2 a = 2 \cdot (1 - \log_2 a)$$

15 g) $2 \cdot \ln\left(e^2\right) - e^{2 \cdot \ln 2} = 4 - 2^2 = 0$

links: $2 \cdot \ln\left(e^2\right) = 2 \cdot 2 \cdot \ln e = 2 \cdot 2$

rechts: $e^{2\cdot\ln 2} = e^{\ln 2+\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^2$

$e^{\ln 2} = 2$

Es gilt die Identität $b = a^{\log_a b}$

16 a) $y = (2x+3)^3 = f(x)^3$

$y' = 3 \cdot f(x)^2 \cdot f'(x)$ (Kettenregel)

$y' = 3(2x+3)^2 \cdot 2$

$y' = 6 \cdot (2x+3)^2$

$y'' = 6 \cdot 2 \cdot (2x+3) \cdot 2$

$y'' = 24 \cdot (2x+3)$

andere Lösung:

$y = (2x+3) \cdot \left(4x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x + 9\right)$

$y = 8x^3 + 24x^2 + 18x + 12x^2 + 36x + 27$

$y = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

$y' = 24x^2 + 72x + 54$

$y' = 6 \cdot \left(4x^2 + 12x + 9\right) = 6 \cdot (2x+3)^2$

$$y'' = 6 \cdot 2 \cdot (2x + 3) \cdot 2 = 24 \cdot (2x + 3)$$

oder $$y'' = 48x + 72 = 24 \cdot (2x + 3)$$

16 b) $$y = (x^2 + 2)^3$$

$$y' = 3 \cdot (x^2 + 2)^2 \cdot 2x$$

$$y' = 6x \cdot (x^2 + 2)^2$$

$$y' = 6x \cdot (x^4 + 4x^2 + 4)$$

$$y' = 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

$$y'' = 30x^4 + 72x^2 + 24$$

16 c) $$y = \frac{x + 2}{x}, \quad (x \neq 0)$$

$$y = 1 + \frac{2}{x} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{2}{x^2} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{4}{x^3}$$

16 d) $y = (x-1)\cdot e^x$

$y = u(x)\cdot v(x)$

$y' = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)$ (Produktregel)

$y' = (x-1)\cdot e^x + 1\cdot e^x$

$y' = x\cdot e^x - e^x + e^x$

$y' = x\cdot e^x$

$y'' = x\cdot e^x + e^x$

$y'' = (x+1)\cdot e^x$

16 e) $y = \sin x\cdot \cos x$

Produktregel anwenden

$u = \sin x$, $u' = \cos x$

$v = \cos x$, $v' = -\sin x$

$y' = \cos^2 x - \sin^2 x$

$y'' = -4\sin x\cdot \cos x$

16 f) $y = \ln^2 x \quad (x > 0)$

$$y' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} \right)$$

$$y'' = 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

16 g) $$y = \frac{\ln x}{x} \qquad (x > 0)$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

$$y'' = -2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (1 - \ln x) + \frac{1}{x^2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{1}{x^3} \cdot (-2 + 2 \cdot \ln x - 1)$$

$$y'' = \frac{1}{x^3} \cdot (2 \cdot \ln x - 3)$$

16 h) $$y = x \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$y' = e^{\sqrt{x}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$y' = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}}\right)$$

$$y'' = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(3 + \sqrt{x}\right) / \left(4 \cdot \sqrt{x}\right)$$

16 i) $y = \left(1 - e^{-2x}\right)^2$

$$y' = 2 \cdot \left(1 - e^{-2x}\right) \cdot (-1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$$

$$y' = 4 \cdot \left(1 - e^{-2x}\right) \cdot e^{-2x}$$

$$y'' = 4 \cdot \left(2e^{-2x} \cdot e^{-2x} + \left(1 - e^{-2x}\right) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}\right)$$

$$y'' = 4 \cdot \left(2e^{-4x} - 2e^{-2x} + 2e^{-4x}\right)$$

$$y'' = 8 \cdot \left(2e^{-4x} - e^{-2x}\right)$$

$$y = 8e^{-2x} \cdot \left(2e^{-2x} - 1\right)$$

oder $y' = 4 \cdot \left(1 - e^{-2x}\right) \cdot e^{-2x}$

$$y' = 4e^{-2x} - 4e^{-4x}$$

$$y'' = -8e^{-2x} - 4\cdot(-4)\cdot e^{-4x}$$

$$y'' = 8e^{-2x}\cdot\left(2e^{-2x} - 1\right)$$

16 j) $y = \dfrac{1}{1+e^{-b\cdot x}}$ $\quad (b>0)$

$$y' = -1\cdot\frac{1}{\left(1+e^{-bx}\right)^2}\cdot(-b)\cdot e^{-bx}$$

$$y' = b\cdot e^{-bx}\cdot\left(1+e^{-bx}\right)^{-2}$$

$$y'' = b\cdot\left(-b\cdot e^{-bx}\cdot\left(1+e^{-bx}\right)^{-2} + e^{-bx}\cdot(-2)\cdot\left(1+e^{-bx}\right)^{-3}\cdot(-b)\cdot e^{-bx}\right)$$

$$y'' = b^2\cdot e^{-bx}\cdot\left(1+e^{-bx}\right)^{-2}\cdot\left(2e^{-bx}\cdot\left(1+e^{-bx}\right)^{-1} - 1\right)$$

$$y'' = b^2\cdot e^{-bx}\cdot\left(1+e^{-bx}\right)^{-3}\cdot\left(e^{-bx} - 1\right)$$

16 k) $y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$ $\quad (a,b>0)$

$$y' = -b\cdot\frac{1}{a^b}\cdot x^{b-1}\cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$$

$$y'' = -\frac{b}{a^b} \cdot \left((b-1) \cdot x^{b-2} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} + x^{(b-1)} \cdot \left(-\frac{b}{a^b} \cdot x^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \right) \right)$$

$$y'' = -\frac{b}{a^b} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \cdot x^{b-1} \cdot \left((b-1) \cdot \frac{1}{x} - \frac{b}{a^b} \cdot x^{b-1} \right)$$

$$y'' = \frac{b}{a^b} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \cdot x^{b-2} \cdot \left(\frac{b}{a^b} \cdot x^b - b + 1 \right)$$

$$y'' = \frac{b^2}{a^b} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \cdot x^{b-2} \cdot \left(\left(\frac{x}{a}\right)^b - 1 + \frac{1}{b} \right)$$

Letzte Änderung: 02.06.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*