Zusätzliche Mathematikaufgaben
(nach Dr. R. Storm)

Aufgabe

---

5. Gegeben sind die Gesamtmenge E = {i | i = 1(1)15} = {1, 2, 3, ... , 15}, und ihre Teilmengen A = {j | j = 1(2)15} = {1, 3, 5, ... , 13, 15}, B = {k | k = 4(4)12} = {4, 8, 12}, C = {2, 4, 6, 8, 9, 12, 13}.

   Man bestimme $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $A \cap C$, C \ B, B \ C, E \ C.

   Man überzeuge sich, daß die Beziehungen $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $C \setminus B = C \cap \overline{B}$ gelten.

10. Man beweise die Beziehung

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 \quad \text{mit} \quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Binomische Formel und die Gesetze für das Rechnen mit dem Summensymbol.

   Mit den Werten x_i aus Aufgabe 8 f) (Mathematikübung 1) berechne man Q und $\frac{Q}{n-1}$.

11. Für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; n, k $\in$ N; k = 0, 1, ..., n; n! = 1*2*3*...*n,

   zeige man die Beziehung $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   (Es gilt 0! = 1, $\binom{n}{0} = 1$)

   Man berechne $\binom{15}{3}$, $\binom{15}{13}$, $\binom{100}{98}$, $\binom{4}{k}$ für k = 0, 1, ..., 4.

12. In einer Kiste befinden sich 10 Pflanzen, von denen 2 Pflanzen beschädigt sind. Der Gärtner entnimmt der Kiste 3 Pflanzen.
   a) Auf wie viele verschiedene Arten ist es möglich?
   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, daß sich unter den 3 entnommenen Pflanzen gerade eine

beschädigte Pflanze befindet?

13. An einem Pferderennen sind 8 Pferde beteiligt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine Vorhersage über die 3 erstplazierten Pferde
a) ohne Angabe ihrer Reihenfolge,
b) mit Angabe ihrer Reihenfolge
zu treffen?

19. Man untersuche die Funktion

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$, (m , s Konstanten, s >0)

auf Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Asymptoten und skizziere sie.
Dazu betrachtet man zunächst den Spezialfall m = 0, s = 1.
Hinweis: Es gilt $\exp\{a\}=e^a$.

20. Welche Parabel hat mit dem Bogen der Sinuslinie $y = \sin x$, $(0 \leq x \leq \pi)$ den Scheitel und die Schnittpunkte mit der x-Achse gemeinsam?
Hinweis: Für die Parabel verwende man den Ansatz $y = ax^2 + bx + c$ und bestimme a, b, c aus den obigen Bedingungen.

21. Der Bestand einer Bakterienkultur zur Zeit t (t in Stunden) wird beschreiben durch $f(t) = ke^{at}$.
Zu Beginn der Beobachtungen (zur Zeit t = 0) waren 2100 Bakterien vorhanden. Nach 4 Stunden waren es 23100 Bakterien.
Bestimmen Sie k und a (a auf eine Dezimale gerundet). Wieviel Bakterien sind es nach 12 Stunden? In welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien?

22. Eine Population von Insekten besteht heute aus $4{,}5 \cdot 10^6$ Individuen, vor 2 Jahren waren es noch $7{,}5 \cdot 10^6$ Individuen.
a) Wann ist die Population verschwunden, wenn man gleichmäßige (lineare) Abnahme voraussetzt?
b) In einem anderen Fall nimmt die Population nach einer Gesetzmäßigkeit der Form
$N(t) = a \cdot e^{-kt}$ ab, wobei N(t) die Anzahl der Individuen in t Jahren (von heute an) bedeutet.
Man bestimme a und (näherungsweise) k. Wann etwa sind nur noch 10% der heutigen Population vorhanden? (Näherungswerte auf 2 Dezimalen)

23. Gesucht sind Schranken für absoluten und relativen Fehler, wenn bei Berechnungen von

    a) π^2 b) $\frac{1}{\pi}$ c) $\frac{(\pi-1)^2}{(\pi+1)^2}$ d) $\ln\pi$

    für π der Näherungswert 3,14 benutzt wird.

24. Der Durchmesser d eines Baumes wird mit 15 cm gemessen mit einem maximalen absoluten Fehler von 0,1 cm. Wie wirkt sich der Fehler auf die Berechnungen der Kreisfläche und des Kreisumfanges (mit dem Durchmesser d) aus?

25. Mit welchem relativen Fehler muß man den Radius einer Kugel messen, damit der relative Fehler des Kugelvolumens 1 % nicht übersteigt?

26. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

    a) $\int\left[x^4-3x^2+2x+1\right]\cdot dx$ b) $\int\left[\frac{2}{5}x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{7}{x}\right]\cdot dx$

    c) $\int\left[e^x+5\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right]\cdot dx$ d) $\int(x-1)^3\cdot dx$

    e) $\int\left(\frac{1}{4}x-1\right)^3\cdot dx$ f) $\int\sqrt{2x+1}\cdot dx$

    g) $\int\sin(4x+3)\cdot dx$ h) $\int\left(e^{3x}+3^x+3^{-x}\right)\cdot dx$

    i) $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ j) $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{(5-x)^2}$

    k) $\int_{-2}^{-6}\frac{dn}{3n}$

27. Skizzieren Sie die folgenden bestimmten Integrale als Flächeninhalt, und berechnen Sie ihre Werte

a) $I_1 = \int_0^5 e^{2x}\,dx$ b) $I_2 = 2\int_0^5 e^{-2x}\,dx$

c) $I_3 = 2\int_5^\infty e^{-2x}\,dx$ d) $I_4 = 2\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen I2, I3 und I4?
Bemerkung: Bei I3 und I4 handelt es sich um sog. Uneigentliche Integrale. Es gilt

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{-ax} = 0$ für jedes a > 0.

28. Berechnen Sie den Inhalt

a) der Fläche zwischen der Kurve $y = 4x^2 + 1$ und der x-Achse im Intervall [-1,2] (Skizze),

b) der von den Kurven $y = \sqrt{3x} + 1$ und y = x + 1 eingeschlossenen Fläche (Skizze!).

29. Man löse die folgenden Differentialgleichungen und skizziere die Lösungskurven (Probe!):

a) $y' + x = 0$, $y(1) = 1$

b) $y' = -xy$, Lösungskurve durch (0;1)

c) $y' = \frac{y}{x}$, ($x \neq 0$)

d) $y' + \frac{x}{y} = 0$

e) $y' + \frac{y}{x^2} = 0$, Lösungskurve durch (1;e)

f) $y' = -by^2$, (b Konstante > 0), spezielle Lösung durch (0;1)

30. Man gebe die Differentialgleichung an, die die Lösung $y = ke^{-x^2/2}$ ($k \in R^1$) besitzt.

Letzte Änderung: 20.04.1999
Kontakt: *Wolfgang Stümer*